Научный журнал Российского НИИ проблем мелиорации, № 4(08), 2012 г., [125-138]

УДК 532.542

**Л. И. Высоцкий** (ФГБОУ ВПО «СГТУ им. Гагарина Ю. А.»)

# К РАСЧЕТУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСРЕДНЕННЫХ СКОРОСТЕЙ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ И ПЛОСКИХ КАНАЛАХ

В статье приводятся новые аналитические зависимости, характеризующие распределение осредненных скоростей в продольно однородных потоках, справедливые в широком диапазоне значений числа Рейнольдса и относительных эквивалентных шероховатостей. Методика расчета безразмерных осредненных скоростей сопровождается пояснениями. Она требует для реализации ввода всего двух определяющих параметров – числа Рейнольдса и относительной эквивалентной шероховатости. Для получения размерных значений требуется дополнительный ввод характерной длины $L$ ($r$ – радиуса для круглых труб, $H$ – глубины для плоских потоков) и динамической скорости $u_*$.

Ключевые слова: отрицательная турбулентная вязкость, осредненная скорость, максимальная скорость, закон распределения.

**L. I. Vysotsky** (FSBEE HPE “SSTU Gagarin”)

# TO CALCULATION OF AVERAGED VELOCITY DISTRIBUTION IN ROUND PIPES AND FLAT CHANNELS

In the paper new analytical dependences describing the distribution of averaged velocities in longitudinal homogeneous flow validated for a wide range of the Reynolds number and the relative equivalent roughness. The methodology for calculation the dimensionless averaged velocities accompanies by explanations. To implement the input there are two key parameters, the Reynolds number and the relative equivalent roughness. In order to receive dimensional values the additional input of characteristic length $L$ ($r$ – radius for round pipes, $H$ – depth for flat flow) and dynamic velocity $u_*$, is required.

Keywords: negative turbulent viscosity, averaged velocity, maximum velocity, distribution law**.**

Одной из основных и, казалось бы, простейших задач гидравлики является получение закона распределения осредненных скоростей в турбулентных продольно однородных потоках. Однако до сего времени точного решения этой задачи не существует, что связано со сложностями, вызванными турбулентностью потоков жидкости и газа. Тем не менее, продолжается разработка все новых моделей продольно однородных потоков, и предлагаются все новые формулы для расчета распределения осредненных скоростей по нормали к стенке в них. Авторами предлагается новая модель продольно однородного турбулентного потока, основанная на открытии (диплом № 376), в которой в составе пристенного слоя потока жидкости предполагается наличие очень тонкого подслоя с отрицательной турбулентной вязкостью [1]. Следует упомянуть, что предлагаемая модель является пятислойной. Весь поток делится на пристенный слой и турбулентное ядро. Пристенный слой делится на три зоны: слой с отрицательной турбулентной вязкостью $\nu_т < 0$, толщиной $\delta_{(-)}$; последующие два слоя отличаются характером изменения в них коэффициента $\nu_т > 0$. Турбулентное ядро делится на две зоны. Примыкающая к пристенному слою зона с линейным изменением $\nu_т$:

$$\nu_т = k u_* y, \tag{1}$$

где $k = 0{,}4$ – постоянная Кармана;

$u_*$ – динамическая скорость;

$y$ – расстояние по нормали от стенки.

В этой зоне имеет место логарифмический закон распределения скоростей.

Во второй зоне турбулентного ядра коэффициент турбулентной вязкости принят постоянным:

$$\nu_т = k u_* AL, \tag{2}$$

где $AL$ – расстояние от стенки до границы раздела двух зон в турбулентном ядре;

$A$ = const;

$L$ – характерная длина ($r$ – радиус для круглых труб, $H$ – глубина для плоских потоков).

В этой зоне распределение осредненных скоростей является параболическим.

При уточнении закона распределения скоростей, коэффициент турбулентной вязкости принят по нормали к стенке, что позволило, в конечном счете последовательным, послойным интегрированием основного уравнения равномерного движения получить очевидное выражение для осредненной скорости:

$$\frac{d\overline{u}}{dy}=\frac{u_*^2}{\nu+\nu_{т}}\left(1-\frac{y}{L}\right), \tag{3}$$

$$\overline{u}=u_*^2\int_0^y\frac{\left(1-y/L\right)}{\nu+\nu_{т}}dy. \tag{4}$$

Реализация данных зависимостей привела к установлению формулы для распределения осредненных скоростей [2].

Существенным моментом является то обстоятельство, что при интегрировании уравнения (3) границы всех пяти зон считались непостоянными, как это принималось до сих пор (обычно в единицах внутреннего масштаба, например, $\delta=5\frac{\nu}{u_*}$ или $\delta=11{,}6\frac{\nu}{u_*}$ и т.д.), а переменными и зависящими от числа Рейнольдса и относительной эквивалентной шероховатости [2].

Предлагаемые формулы для расчета распределения осредненных скоростей в продольно однородных потоках имеют вид:

1 В пределах пристенного слоя $\delta_{ст}$ (в трех его зонах) значения осредненных скоростей определяются значением параметра $A1$ и представлены формулами, по которым они вычисляются непосредственно. Безразмерные скорости $\frac{\overline{u}}{u_*}$ приведены в зависимости от безразмерного расстояния от стенки $y^+=\frac{yu_*}{\nu}$. Первая зона, как и две последующих, делится на десять частей с шагами:

- в первой зоне $\Delta y^+=\delta_{(-)}\cdot 0{,}1=c_1\cdot 0{,}1$;

- во второй зоне $\Delta y^+=\left(b-\delta_{(-)}\right)\cdot 0{,}1$;

- третьей зоне $\Delta y^+=\left(a-b\right)\cdot 0{,}1=\left(\delta_{ст}-b\right)\cdot 0{,}1$.

Соотношение расстояний от стенки $c_1{:}b{:}a{=}\delta_{(-)}{:}b{:}\delta_{ст}$ принято равным 1,5 : 30 : 70.

Данные для расчета осредненных скоростей в пределах пристенного слоя приведены в таблице 1.

**Таблица 1 – Значение безразмерных осредненных скоростей в пристенном слое**

| Безразмерные скорости $\frac{\bar{u}}{u_*}$ | | | |
|---|---|---|---|
| В зоне значений $\frac{yu_*}{\nu} = c_1 \cdot 0{,}1 \cdot I$ | | В зоне значений $\frac{yu_*}{\nu} = c_1 + (b - c_1)0{,}1 \cdot I$ | В зоне значений $\frac{yu_*}{\nu} = b + (a - b)0{,}1 \cdot I$ |
| 0 | 0,0000 | $a10^{-2}\left(2{,}354-0{,}257\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(19{,}27-2{,}57\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ |
| 1 | $a10^{-2}\left(0{,}214-0{,}0002\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(6{,}017-0{,}270\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(19{,}73-2{,}70\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ |
| 2 | $a10^{-2}\left(0{,}430-0{,}0009\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(9{,}070-0{,}418\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(20{,}14-2{,}99\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ |
| 3 | $a10^{-2}\left(0{,}648-0{,}0021\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(11{,}686-0{,}735\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(20{,}50-3{,}20\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ |
| 4 | $a10^{-2}\left(0{,}875-0{,}0038\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(13{,}856-1{,}087\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(20{,}82-3{,}40\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ |
| 5 | $a10^{-2}\left(1{,}115-0{,}0061\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(15{,}573-1{,}433\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(21{,}11-3{,}59\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ |
| 6 | $a10^{-2}\left(1{,}370-0{,}0092\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(16{,}851-1{,}742\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(21{,}37-3{,}72\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ |
| 7 | $a10^{-2}\left(1{,}642-0{,}0129\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(17{,}779-2{,}0004\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(21{,}62-3{,}98\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ |
| 8 | $a10^{-2}\left(1{,}898-0{,}0170\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(18{,}422-2{,}235\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(21{,}84-4{,}18\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ |
| 9 | $a10^{-2}\left(2{,}134-0{,}0213\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(18{,}886-2{,}415\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(22{,}06-4{,}37\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ |
| 10 | $a10^{-2}\left(2{,}354-0{,}0257\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(19{,}269-2{,}571\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ | $a10^{-2}\left(22{,}26-4{,}57\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)$ |
| Примечание: $\frac{\delta_{ст}}{r_0} = \frac{a}{r_0^+}$; $r_0^+ = \frac{r_0 u_*}{\nu}$; $c_1 = \frac{\delta_{(-)} u_*}{\nu}$ | | | |

2 В турбулентном ядре формулы для распределения осредненных скоростей имеют вид:

- при $\delta_{ст} \le z \le A \cdot L$:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{\bar{u}_{ст}}{u_*} + \frac{1}{k}\left( In\frac{z}{\delta_{ст}} - \frac{z-\delta_{ст}}{L} \right); \qquad (5)$$

- при $z > A \cdot L$:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{\bar{u}_{ст}}{u_*} + \frac{1}{k}\left( In\frac{AL}{\delta_{ст}} - A\frac{\delta_{ст}}{L} \right) + \frac{1}{kA}\left[ \frac{z}{L}\left( 1-0{,}5\frac{z}{L} \right) - A + \frac{A^2}{2} \right]; \qquad (6)$$

- при $\delta_{ст} > A \cdot L$:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{\bar{u}_{ст}}{u_*} + \frac{1}{kA}\left[ \frac{z}{L}\left( 1-0{,}5\frac{z}{L} \right) - A + \frac{A^2}{2} \right]; \qquad (7)$$

- в условия шероховатых стенок:

- при $\Delta \le z \le A \cdot L$:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 8{,}5 + \frac{1}{k}\left( In\frac{z}{\Delta} - \frac{z-\Delta}{L} \right); \qquad (8)$$

- при $z > A \cdot L$:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 8{,}5 + \frac{1}{k}\left( In\frac{AL}{\Delta} - A + \frac{\Delta}{L} \right) + \frac{1}{kA}\left[ \frac{z}{L}\left( 1-0{,}5\frac{z}{L} \right) - A + \frac{A^2}{2} \right]; \qquad (9)$$

- при $\Delta = A \cdot L$:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 8{,}5 + \frac{1}{kA}\left[ \frac{z}{L}\left( 1-0{,}5\frac{z}{L} \right) - A + \frac{A^2}{2} \right]; \qquad (10)$$

где $\bar{u}_{ст} = \bar{u}\big|_{y=\delta_{ст}}$;

$k = 0{,}4$ – константа Кармана;

$L$ (или $H$) – характерные длины для потоков в трубе или со свободной поверхностью;

$\Delta$ – высота выступов эквивалентной шероховатости;

$z$ (или $y$) – расстояние от стенки по нормали к ней.

Из найденных соотношений легко получить формулы для определения относительной средней скорости $\dfrac{V}{u_*}$:

- при $\delta_{ст} < Ar_0$:

$$\frac{V}{u_*}=\frac{\bar{u}_{ст}}{u_*}\left(1-\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)^2+2{,}5\left(\ln\frac{Ar_0}{\delta_{ст}}-1\right)+\frac{0{,}625}{A}-3{,}75A+1{,}25A^2-0{,}2A^3+$$
$$+\frac{\delta_{ст}}{r_0}(7{,}5+0{,}35a)-\left(\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)^2(3{,}75+0{,}252a)+\left(\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)^3(0{,}84+0{,}34a);\quad(11)$$

- при $\delta_{ст} \geq Ar_0$:

$$\frac{V}{u_*}=(1-A)^2\frac{\bar{u}_{ст}}{u_*}+\frac{0{,}625}{A}-2{,}5+A(3{,}75+0{,}354a)-$$
$$-A^2(2{,}5+0{,}252a)+A^3(0{,}64-0{,}034a);\quad(12)$$

- при $A = 1$:

$$\frac{V}{u_*}=-4{,}58+(7{,}5+0{,}354a)-(3{,}75+0{,}252a)+(0{,}84+0{,}034a)=0{,}13.\quad(13)$$

На оси трубопровода значение относительной максимальной осредненной скорости определяется зависимостями:

- при $\delta_{ст} < Ar_0$:

$$\frac{\bar{u}_{max}}{u_*}=\frac{\bar{u}_{ст}}{u_*}+2{,}5\left(\ell n\frac{Ar_0}{\delta_{ст}}-A+\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)+\frac{2{,}5}{A}\left(0{,}5-A+\frac{A^2}{2}\right),\quad(14)$$

а если принято $k$ =0,4, то:

$$\frac{\bar{u}_{max}}{u_*}=\frac{\bar{u}_{ст}}{u_*}+2{,}5\left(\ell n\frac{Ar_0}{\delta_{ст}}-1+\frac{\delta_{ст}}{r_0}\right)+\frac{1{,}25}{A}-1{,}25A;\quad(15)$$

- при $\delta_{ст} = Ar_0$:

$$\frac{\bar{u}_{max}}{u_*}=\frac{\bar{u}_{ст}}{u_*}+\frac{1{,}25}{A}-1{,}25A-2{,}5.\quad(16)$$

В случае плоских потоков те же формулы имеют вид:

$$\frac{V}{u_*}=\frac{\bar{u}_{\text{ст}}}{u_*}\left(1-\frac{\delta_{\text{ст}}}{H}\right)+2{,}5\ln\frac{AH}{\delta_{\text{ст}}}-2{,}5(1+A)+0{,}417A^2+\frac{0{,}833}{A}+$$
$$+\frac{\delta_{\text{ст}}}{H}(5+0{,}177a)-\left(\frac{\delta_{\text{ст}}}{H}\right)^2(1{,}25+0{,}26a)+0{,}864a\left(\frac{\delta_{\text{ст}}}{H}\right)^3, \qquad (17)$$

а формула для максимальной скорости имеет тот же вид, что и в случае круглой трубы:

$$\frac{\bar{u}_{\max}}{u_*}=\frac{\bar{u}_{\text{ст}}}{u_*}+2{,}5\ln\frac{AH}{\delta_{\text{ст}}}-2{,}5-1{,}25A+\frac{1{,}25}{A}+2{,}5\frac{\delta_{\text{ст}}}{H}. \qquad (18)$$

На основе новой модели турбулентности, исходя из перечисленных условий и требований к формуле для распределения осредненных скоростей в продольно однородных турбулентных потоках, предложены соответствующие формулы, лучше удовлетворяющие указанным условиям, в том числе у стенки и на оси трубы (или свободной поверхности):

- длина, входящая в размерность кинематической турбулентной вязкости $\nu_{\text{т}}$, представляет собой просто расстояние от стенки (как это первоначально и было предложено Л. Д. Ландау [3]);

- у гладкой стенки ламинарный пограничный слой отсутствует;

- у гладкой стенки существует тончайший слой, в пределах которого $\nu_{\text{т}}$ отрицательно, что означает, что в пределах этого слоя толщиной $\delta_{(-)}\approx(1{,}5\div3)\frac{\nu}{u_*}$ кинетическая энергия турбулентности возвращается осредненному движению. Последнее приводит к некоторому локальному увеличению осредненных скоростей, нарушению линейности в их распределении в этом слое и образованию двух точек перегиба в эпюре скоростей;

- универсальная константа Кармана принимается таковой и равной $k$ = 0,4;

- влияние шероховатости учитывается эквивалентной шероховатостью $\Delta_{\text{э}}$;

- градиенты осредненных скоростей у стенки должны быть равны $\frac{u_*^2}{\nu}$, а на оси трубы или у свободной поверхности нулевыми;

- у стенки образуется пристенный слой толщиной $\delta_{\text{ст}} = a_1 \frac{\nu}{u_*}$. При больших числах $\mathrm{Re}_d$ оказалось, что $a$ = 70. Это соответствует многим рекомендациям;

- в пределах пристенного слоя сказывается влияние физического коэффициента вязкости $\nu$ и турбулентной вязкости $\nu_{\text{т}}$. Характер этого влияния задается феноменологически с учетом очевидных соображений: ближе к стенке влияние $\nu$ должно быть преобладающим, а ближе к условной границе пристенного слоя оно должно становиться исчезающим;

- в единицах длины, равных $\frac{\nu}{u_*}$, обозначим толщину слоя с $\nu_{\text{т}} < 0$ и $\delta_{(-)} = c\frac{\nu}{u_*}$; толщину слоя с возрастающим влиянием $\nu_{\text{т}} > 0$ при $\frac{d\nu_{\text{т}}}{dy} > 0$ и $\frac{d^2\nu_{\text{т}}}{dy^2} > 0$ обозначим $\delta_{в} = (в - c)\frac{\nu}{u_*}$, а толщину верхней части пристенного слоя, на границе которого влияние $\nu_{\text{т}}$ становится подавляющим при $\nu_{\text{т}} > 0$, $\frac{d\nu_{\text{т}}}{dy} > 0$ и $\frac{d^2\nu_{\text{т}}}{dy^2} < 0$, обозначим $\delta_{(-)} = (a - в)\frac{\nu}{u_*}$. При больших числах $\mathrm{Re}_d$ рекомендуется принимать $a$ = 70, $b$ = 30, $c$ = 1,5;

- при малых числах $\mathrm{Re}_d$ толщина пристенного слоя становится соизмеримой с $r_0$, что подлежит специальному учету;

- турбулентное ядро условно делится в соответствии со схематизацией эпюры распределения турбулентной вязкости $\nu_{\text{т}} = \nu_{\text{т}}(y)$ или $\nu_{\text{т}} = \nu_{\text{т}}(z)$ на две части. В примыкающей к пристенному слою части, где принято, что $\nu_{\text{т}} = \kappa u_* y$ (или $\kappa u_* y$), эпюра распределения осредненных скоростей естественным образом становится логарифмической, а в остальной части, где принято $\nu_т = \text{const}$, – параболической. Эти части эпюры смыкаются с обеспечением непрерывности в распределении $\bar{u}$ и $\frac{d\bar{u}}{dy}$. Первая часть простирается от стенки на расстояние $y_A = Ar_0$ (или $z_A = AH$ ), причем при больших $\mathrm{Re}_d$ $A$ =0,1735;

- числовые значения $a$, $A$ согласуются со многими опытными данными, хотя и находились определенным образом численно. Мнение о возможности представления эпюры скоростей комбинацией логарифмического и параболического законов высказывались в [4];

- таким образом, при гладких стенках пристенная зона оказывается расчлененной на три части, а турбулентное ядро – на две. Следовательно, эту модель можно назвать пятислойной;

- вопреки сохраняющемуся мнению многих исследователей, показано, что переход от гладкостенного к доквадратичному сопротивлению связан с разрушением слоя $\nu_т < 0$, что происходит при высоте выступов шероховатости $\Delta_э \approx 0{,}2 \div 0{,}3\delta_{(-)}$. Переход же от доквадратичного к квадратичному сопротивлению наблюдается при достижении значений $\Delta_э \approx 0{,}2 \div 0{,}3\delta_{(-)}$. Это обстоятельство представляется физически более реальным, чем «протыкание выступами шероховатости» ламинарной пленки;

- предлагаемые формулы получены интегрированием исходного уравнения:

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*^2}{\nu + \nu_т}\left(1 - \frac{y}{r_0}\right) \text{ или } \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*^2}{\nu + \nu_т}\left(1 - \frac{z}{H}\right).$$

В пределах пристенного слоя, то есть при изменении $\delta_{(-)} > y > 0$, интегрирование велось численно, а при $r_0 > y > \delta_{ст}$ – аналитически;

- при шероховатых стенках интегрирование осуществлялось аналитически в пределах $\Delta_э < y < r_0$ с принятием в качестве граничного условия значения $\dfrac{\bar{u}_\Delta}{u_*}=8{,}5$ (вторая константа турбулентности).

Использование предложенной универсальной формулы для расчета распределения осредненных скоростей требует предварительной разработки способа определения входящих в них параметров $\delta_{ст}$, $a$ и $A$, зависящих в общем случае от определяющих факторов $\mathrm{Re}_L$ и $\Delta/L$.

Задача выявления указанной зависимости решается с последующим использованием вычислительного эксперимента с опорой на следующие наиболее надежные теоретические и экспериментальные факты:

- средняя скорость связана с коэффициентом Дарси соотношениями:

$$\frac{V}{u_*}=\sqrt{\frac{8}{\lambda_d}} \text{ при } L=r_0; \tag{19}$$

$$\frac{V}{u_*}=\sqrt{\frac{2}{\lambda_H}} \text{ при } L=H; \tag{20}$$

- дефицит средней скорости составляет:

$$D=\frac{u_{\max}-V}{u_*}=4 \text{ при } L=r_0; \tag{21}$$

$$D=\frac{u_{\max}-V}{u_*}=2{,}6 \text{ при } L=H, \tag{22}$$

далее имеем:

$$\frac{\delta_{ст}}{L}=\frac{a\cdot V}{\mathrm{Re}_L\cdot u_*}=c\cdot a, \tag{23}$$

где $c=\dfrac{V/u_*}{\mathrm{Re}_L}=\dfrac{1}{\mathrm{Re}_L}$,

или

$$\frac{\delta_{ст}}{r_0}=\frac{2a\cdot V}{\mathrm{Re}_D\cdot u_*} \text{ при } L=r_0; \tag{24}$$

$$\frac{\delta_{ст}}{H}=\frac{a\cdot V}{\mathrm{Re}_H\cdot u_*}=c\cdot a \text{ при } L=H,\ c=\frac{2}{\mathrm{Re}_D}. \tag{25}$$

Для определения двух, как указывалось, параметров $a$ и $A$ выбираем два исходных трансцендентных уравнения:

$$V = V(a, A) \text{ и } D = D(a, A). \tag{26}$$

В подготовленных для решения этих задач нелинейных уравнениях методом Ньютона исходные выражения имеют вид:

$$\begin{aligned} F &= a_0(0{,}2227 - 0{,}04573 \cdot c \cdot a_o)(1 - c \cdot a_0)^2 + 2{,}5 \ln \frac{A_0}{c \cdot a_0} + \frac{0{,}625}{A_0} + 1{,}25 A_0^2 - \\ &- 0{,}2 A_0^3 - 2{,}5 + 7{,}5 c \cdot a_0 + 0{,}354 c \cdot a_0 - 3{,}75 (c \cdot a_0)^2 - 0{,}252 c^2 \cdot a_0^3 + \\ &+ 0{,}84 (c \cdot a_0)^3 + 0{,}034 c^3 \cdot a_0^4 - \frac{V}{u_*}; \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} G &= a_0(0{,}2227 - 0{,}04573 \cdot c \cdot a_0) c \cdot a_0 (2 - c \cdot a_0) + \frac{0{,}625}{A_0} + 2{,}5 A_0 - \\ &- 1{,}25 A_o^2 + 0{,}2 A_0^3 - c \cdot a_0 (7{,}5 + 0{,}354 \cdot a_0) + c a_0^2 (3{,}75 + 0{,}252 \cdot a_0) - \\ &- c a_0^3 (0{,}84 + 0{,}034 a_0) + 2{,}5 c \cdot a_0 - D. \end{aligned} \tag{28}$$

Применяя для решения системы двух нелинейных трансцендентных уравнений метод итераций Ньютона, получим производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= (0{,}2227 - 0{,}04573 \cdot c \cdot a_0)(1 - c \cdot a_0)^2 - a_0 0{,}04573 \cdot c (1 - c \cdot a_0)^2 - \\ &- a_0 (0{,}2227 - 0{,}04573 \cdot c \cdot a_0)^2 c (1 - c \cdot a_0) - \frac{2{,}5}{a_0} + 7{,}5 c + 0{,}708 c a_0 - \\ &- 7{,}5 c^2 a_0 - 0{,}756 (c a_0)^2 + 2{,}52 c^3 a_0^2 + 0{,}136 c^3 a_0^3; \end{aligned} \tag{29}$$

$$\frac{\partial F}{\partial A} = \frac{2{,}5}{A_o} - \frac{0{,}625}{A_0^2} - 3{,}75 + 2{,}5 A_0 - 0{,}6 A_0^2; \tag{30}$$

$$\frac{\partial G}{\partial A} = \frac{0{,}625}{A_0^2} + 2{,}5 + 2{,}5 A_0 - 0{,}6 A_0^2 \ ; \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial a} &= (0{,}2227 - 0{,}04573 \cdot c \cdot a_0) c \cdot a_0 (1 - c \cdot a_0)^2 - a_0^2 0{,}04573 \cdot c^2 (2 - c \cdot a_0) - \\ &- 5c - 0{,}708 c a_0 + 7{,}5 c^2 a_0 - 2{,}52 c^3 a_0^2 + 0{,}136 (c a_0)^3 + 0{,}736 (c a_0)^2. \end{aligned}$$

Расчет ведется методом итераций Ньютона до достижения совпадения последующего и предыдущего значений $A^{n+1}$ и $A^n$, $a^{n+1}$ и $a^n$

с точностью до задаваемой погрешности.

Итерационная формула Ньютона имеет вид:

$$a = a_0 + \left( G\frac{\partial F}{\partial A} - F\frac{\partial G}{\partial A} \right) / DD; \tag{32}$$

$$A = A_0 + \left( F\frac{\partial G}{\partial a} - G\frac{\partial F}{\partial A} \right) / DD, \tag{33}$$

где $DD = \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial G}{\partial A} - \frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial G}{\partial a}$;

$a_0$ и $A_0$ – нулевые приближения $a$ и $A$ соответственно.

В случае, если окажется, что $\delta_{ст}$ превышает значение $A \cdot L$, то есть, если имеет место вырождение части турбулентного ядра с логарифмическим законом распределения скоростей, то принимается, что при дальнейшем уменьшении числа $\mathrm{Re}_L$ значения $\delta_{ст}$ и $A \cdot L$ совпадают:

$$\delta_{ст} / L = A. \tag{34}$$

Поскольку параметры $\delta_{ст}$ и $a$ взаимозависимы, то в данном случае оказывается, что все три параметра $\delta_{ст}$, $a$ и $A$ линейно зависимы. Это означает, что для их определения можно использовать лишь одно уравнение.

Остальные уравнения при этом могут служить лишь цели оценки получаемых результатов.

Используем далее в рассмотренном случае уравнение для $F$. Для построения итерационного процесса по Ньютону можно использовать одну из производных от $F$, то есть $\partial F / \partial a$ или $\partial F / \partial A$. Примем $\partial F / \partial a$.

Выражение для $F$ имеет вид, несколько отличный от выражения (27), так как $\ln\frac{A \cdot L}{\delta_{ст}} \equiv 0$, а в выражении для $\partial F / \partial A$ пропадает $\frac{\partial}{\partial a}\ln\frac{A \cdot L}{\delta_{ст}}(\ln i) \equiv 0$.

Тогда итерационные значения $a$ определяются по формуле:

$$a^{n+1} = a^n - \frac{F(a^n)}{\frac{\partial F(a^n)}{\partial a}} \equiv 0. \qquad (35)$$

При определении $a$ и $A$ расчеты по приведенным формулам не вызывают затруднений.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

- впервые предложена универсальная формула для расчета распределения осредненных скоростей в продольно-однородных потоках;

- формулы не содержат поправочных коэффициентов, удовлетворяют всем граничным условиям и справедливы как для течений в круглых трубах, так и для пограничных слоев течения при нулевом градиенте давления;

- формулы прошли широкую апробацию.

**Список использованных источников**

1 Высоцкий, Л. И. Явление возникновения течения с отрицательной турбулентной вязкостью в продольно-однородном турбулентном потоке жидкости / Л. И. Высоцкий, И. С. Высоцкий // Научные открытия 2009: сборник кратких описаний, научных открытий, научных гипотез. – М.: РАЕН, 2010. – С. 25-27.

2 Высоцкий, Л. И. Построение сквозной для всех зон сопротивления формулы для распределения осредненных скоростей в продольно-однородных турбулентных потоках / Л. И. Высоцкий // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений: межвуз. науч. сб. – Саратов: СГТУ, 2005. – С. 7-63.

3 Ландау, Л. Д. Механика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Гостехтеориздат, 1953. – 736 с.

4 Хинце, И. О. Турбулентность, ее механизм и теория / И. О. Хинце. – М.: Физматгиз, 1963. – 612 с.

**Высоцкий Лев Ильич** – доктор технических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образо-

вания «Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А.» (ФГБОУ ВПО «СГТУ им. Гагарина Ю. А.»), профессор.
Контактный телефон: 8-845-228-89-38.
E-mail:vysotli@jandex.ru

**Vysotskiy Lev Ilich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Federal State Budget Educational Establishment of Higher Professional Education "Saratov State Technical University Gagarin" (FSBEE HPE "SSTU Gagarin"), Professor.
Contact telephone number: 8-845-228-89-38.
E-mail: vysotli@ jandex.ru